УДК 517.929

© **С. Н. Нидченко**

РОЖДЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ИЗ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Рассматриваем скалярное дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{\pi}{2}x(t-1) + f(x(t), x(t-1), \varepsilon), \tag{1}$$

где f — непрерывная по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемая по первому и второму аргументам функция в малой окрестности точки $(0,0,0)^\top$, $f(x, x_{-1}, \varepsilon) = a(\varepsilon)x + b(\varepsilon)x_{-1} + o\left(\left(x^2 + x_{-1}^2\right)^{1/2}\right)$, a и b — непрерывные функции в малой окрестности нуля, $a(0) = b(0) = 0$. Требуется найти периодические решения этого уравнения в окрестности нулевого положения равновесия при малых значениях ε и исследовать их на устойчивость. Проблема рождения периодических решений из положения равновесия рассматривалась в работах [1, 2, 3, 4].

В настоящей работе для рассматриваемого уравнения адаптируется методика исследований, описанная в работах [5, 6], где для построения уравнения разветвления используется специальное интегральное уравнение. Учитывая специфику условий данной задачи, предлагаем специальную процедуру построения функции Грина для интегрального уравнения. При нахождении системы уравнений разветвления не производится расщепление пространства и выделение специальной двумерной системы, отвечающей критическим корням характеристического уравнения, как это делается в работах [1, 2, 3]. Использование специального интегрального уравнения позволяет параметризовать многообразие, которому принадлежат искомые периодические решения в бесконечном пространстве состояний $C[-1,0]$. Для анализа системы уравнений разветвления использована модификация метода Хопфа. Получены условия существования периодических решений уравнения (1) с гладкой функцией f, представимой в виде асимптотического разложения

$$\begin{gathered} f(x, x_{-1}, \varepsilon) = a(\varepsilon)x + b(\varepsilon)x_{-1} + c_1(\varepsilon)x^2 + 2c_2(\varepsilon)xx_{-1} + c_3(\varepsilon)x_{-1}^2 + l_1(\varepsilon)x^3 + \\ l_2(\varepsilon)x^2x_{-1} + l_3(\varepsilon)xx_{-1}^2 + l_4(\varepsilon)x_{-1}^3 + v_1(\varepsilon)x^4 + v_2(\varepsilon)x^3x_{-1} + \\ v_3(\varepsilon)x^2x_1^2 + v_4(\varepsilon)xx_{-1}^3 + v_5(\varepsilon)y^4 + o\left(\left(x^2 + x_{-1}^2\right)^2\right), \end{gathered} \tag{2}$$

где

$$\begin{gathered} a(\varepsilon) = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),\, b(\varepsilon) = b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \\ c_i(\varepsilon) = c_i^0 + c_i^1\varepsilon + c_i^2\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right),\, i = \overline{1,3}, \\ l_j(\varepsilon) = l_j^0 + l_j^1\varepsilon + o(\varepsilon), j = \overline{1,4}, \\ v_k(\varepsilon) = v_k^0 + O(\varepsilon), k = \overline{1,5}, |\varepsilon| < \varepsilon^*. \end{gathered}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть для функции* f *выполняются требования гладкости* (2), $a(0) = b(0) = 0$, $\pi b'(0) \neq 2a'(0)$ *и* $\varepsilon_2 = -\big(3l_1^0/2 + l_3^0/2 - \pi l_2^0/4 - 3\pi l_4^0/4 + (18-2\pi)\left(c_1^0\right)^2/(5\pi) + (4-6\pi)\left(c_2^0\right)^2/(5\pi) + (4-11\pi)\left(c_3^0\right)^2/(5\pi) + (18-7\pi)\left(c_1^0c_2^0 + c_1^0c_3^0 + c_2^0c_3^0\right)/(5\pi)\big)/(2a_1 - \pi b_1) \neq 0$. *Тогда при* $0 < \varepsilon/\varepsilon_2 < \varepsilon^*/|\varepsilon_2|$, $\varepsilon^* > 0$, *существует единственное периодическое решение уравнения* (1), *определяемое формулами:* $\tilde{x}(t,\varepsilon) = \xi\Big(t/\big(1+\alpha(\varepsilon)\big), \varepsilon\Big)$, $s = t/\big(1+\alpha(\varepsilon)\big)$, $\alpha = \alpha_2\varepsilon/\varepsilon_2 + o\left((\varepsilon/\varepsilon_2)^{3/2}\right)$,

$$\tilde{\xi}(s,\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{\pi}\left(c_1^0 + c_3^0\right) + \frac{1}{5\pi}\left(c_3^0 - c_1^0 - 4c_2^0\right)\cos(\pi s) + \frac{2}{5\pi}\left(c_1^0 - c_2^0 - c_3^0\right)\sin(\pi s)\right) + o(\varepsilon),\ s \in [0,4], \tag{3}$$

$\alpha_2 = -\big(-a_1 l_2^0 - 3a_1 l_4^0 + 3b_1 l_1^0 + b_1 l_3^0 + (36b_1 - 8a_1)\left(c_1^0\right)^2/(5\pi) + (8b_1 - 24a_1)\left(c_2^0\right)^2/(5\pi) + (8b_1 - 44a_1)\left(c_3^0\right)^2/(5\pi) + (36b_1 - 28a_1)\left(c_1^0c_2^0 + c_1^0c_3^0 + c_2^0c_3^0\right)/(5\pi)\big)/(2a_1\pi - \pi^2 b_1)$. Период этого решения равен $\omega(\varepsilon) = 4(1 + \alpha_2\varepsilon/\varepsilon_2) + o(\varepsilon)$. При $-\varepsilon^*/|\varepsilon_2| < \varepsilon/\varepsilon_2 < 0$ уравнение (1) не имеет периодических решений.

Для исследования на устойчивость полученных периодических решений изучается поведение характеристических показателей уравнение линейного приближения при изменение малого параметра. Анализ показывает, что при нулевом значении параметра уравнение линейного приближения имеет двухкратный характеристический показатель $\lambda = i\pi/2$. Остальные характеристические показатели имеют отрицательные действительные части. При возрастании параметра двухкратный характеристический показатель распадается на два. Причем один из них равен $\lambda = i\pi/2$.

Для нахождения зависимости второго характеристического показателя от малого параметра используется методика работы [7], что позволяет получить следующий результат.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и $0 < \varepsilon/\varepsilon_2 < \varepsilon^*/|\varepsilon_2|$. Тогда при малых значениях ε периодическое решение уравнения (1) будет устойчивым при $\lambda_2 < 0$ и неустойчивым при $\lambda_2 > 0$, где*

$$\lambda_2 = -\frac{8}{4+\pi^2}\left(-\frac{3}{4}l_1^0 + \frac{\pi}{8}l_2^0 - \frac{1}{4}l_3^0 + \frac{3\pi}{8}l_4^0 + \left(\frac{7}{10} - \frac{9}{5\pi}\right)\left(c_1^0c_2^0 + c_1^0c_3^0 + c_2^0c_3^0\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{9}{5\pi}\right)\left(c_1^0\right)^2 + \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5\pi}\right)\left(c_2^0\right)^2 + \left(\frac{11}{10} - \frac{9}{5\pi}\right)\left(c_1^3\right)^2\right).$$

Полученные результаты представлены в виде удобных для использования счетных формул. А также являются обобщением результата [2, с. 134], полученного другим методом.

Список литературы

1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
2. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.
3. Kazarinoff N. D., Wan Y. H., van den Driessche P. Hopf bifurcation and stability of periodic solution of differential-difference and integro-differential equations // J. Inst. of Math. and Ins. Appl. 1978. V. 21. P. 461–477.
4. Долгий Ю. Ф., Колупаева О. С. Бифуркация Хопфа для дифференциальных уравнений с малым запаздыванием // Вестник ПГТУ. Функционально-дифференциальные уравнения. 1997. № 4. С. 84–90.
5. Долгий Ю. Ф. Метод вспомогательных систем Шиманова в задачах построения уравнений разветвления // Изв. Урал. гос. университета. Математика и механика. 2003. № 26. вып. 5. С. 55–65.
6. Долгий Ю. Ф. Метод вспомогательных систем Шиманова в задачах периодических колебаний автономных систем // Тезисы докл. VII международного семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем уравнений». Москва. 2002. С. 24–26.
7. Шиманов С.Н. Об отыскание характеристических показателей систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами// ПММ. 1958. Т. 22, вып. 3. С. 382-385.

Нидченко Сергей Николаевич
Уральская гос. юридическая академия,
Россия, Екатеринбург
e-mail: Nidchenko_sergey@mail.ru